Momentul cinetic

In mecanica clasică momentul cinetic este definit ca:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (yp_z - zp_y)\vec{i} + (zp_x - xp_z) + (xp_y - yp_x)\vec{k} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}.$$

In mecanica cuantică se definește operatorul moment cinetic

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &\to \hat{\vec{r}} = \vec{r} \\ \vec{p} &\to \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

$$\boxed{\hat{\vec{L}} = -i\hbar\, \vec{r} \times \vec{\nabla}}$$ — op. moment cinetic

$$\vec{\nabla} = \partial_x \vec{i} + \partial_y \vec{j} + \partial_z \vec{k}$$

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y)\vec{i} - i\hbar(z\partial_x - x\partial_z)\vec{j} - i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \end{aligned}}$$

— componentele carteziene ale operatorului moment cinetic

Relațiile de comutare:

$$[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z]$$

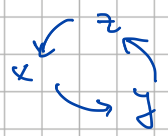
$$= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]$$

$$\text{with } [yp_z, xp_z] = 0,\quad [zp_y, zp_x] = 0$$

$$-i\hbar\, yp_x + i\hbar\, xp_y = i\hbar(xp_y - yp_x)$$

$$\boxed{[L_x, L_y] = i\hbar L_z}$$

Restul comutatorilor se obțin efectuând permutări ciclice



$$x \to y \to z \to x$$

$$\boxed{[L_x, L_y] = i\hbar L_z \; ; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \qquad [L_z, L_x] = i\hbar L_y}$$

Exemple: a) Să se calculeze comutatorii: $[x, L_x]$, $[x, L_y]$ și $[x, L_z]$, $[p_x, L_x]$, $[p_x, L_y]$, $[p_x, L_z]$, $[x, L^2]$, $[p_x, L^2]$

$$[x, L_x] = [x, yp_z - zp_y] = 0$$

$$[x, L_y] = [x, zp_x - xp_z] = [x, zp_x] = i\hbar z$$

$$[x, L_z] = [x, xp_y - yp_x] = -[x, yp_x] = -i\hbar y$$

$$[p_x, L_x] = [p_x, yp_z - zp_y] = 0$$

$$[p_x, L_y] = [p_x, zp_x - xp_z] = -[p_x, xp_z] = i\hbar p_z$$

$$[p_x, L_z] = [p_x, xp_y - yp_x] = [p_x, xp_y] = -i\hbar p_y$$

$$[x, L^2] = [x, L_x^2] + [x, L_y^2] + [x, L_z^2]$$

$$= L_x \underbrace{[x, L_x]}_{=0} + \underbrace{[x, L_x]}_{=0} L_x + L_y[x, L_y] + [x, L_y]L_y + L_z[x, L_z] + [x, L_z]L_z$$

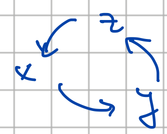
$$\boxed{[x, L^2] = i\hbar\,(L_y \cdot z + z L_y - L_z \cdot y - y \cdot L_z)}$$

$$[p_x, L^2] = \underbrace{[p_x, L_x^2]}_{=0} + [p_x, L_y^2] + [p_x, L_z^2]$$

$$= L_y[p_x, L_y] + [p_x, L_y]L_y + L_z[p_x, L_z] + [p_x, L_z]L_z$$

$$\boxed{[p_x, L^2] = i\hbar\,(L_y p_z + p_z L_y - L_z p_y - p_y L_z)}$$

Din nou, Restul comutatorilor se obțin efectuând permutări ciclice



$x \to y \to z \to x$

Formalismul general al momentului cinetic

Definiție:

Un operator $\hat{J}$ care are trei componente J_x, J_y și J_z care satisfac relațiile de comutare

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad , \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x \quad , \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

sau, echivalent, $\vec{J} \times \vec{J} = i\hbar \vec{J}$

se numește moment cinetic

Momentul cinetic la pătrat $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ și J^2 comută cu toate componentele

$$[J^2, J_x] = \underbrace{[J_x^2, J_x]}_{0} + [J_y^2; J_x] + [J_z^2, J_x]$$

$$= J_y \underbrace{[J_y, J_x]}_{-i\hbar J_z} + \underbrace{[J_y, J_x]}_{-i\hbar J_z} J_y + J_z \underbrace{[J_z, J_x]}_{i\hbar J_y} + [J_z, J_x] J_z$$

$$= i\hbar \left(- J_y J_z - J_z J_y + J_z J_y + J_y J_z \right) = 0.$$

$[J^2, J_x] = 0 \Rightarrow$ $\boxed{J^2 \text{ comută cu } J_x, J_y \text{ și } J_z}$

Stările proprii și valorile proprii ale op. moment cinetic

deoarece J^2 comută cu $J_x, J_y, J_z \Rightarrow J^2$ poate fi diagonalizat împreună cu una dintre componente. Prin convenție se alege J_z. $\Rightarrow (J^2, J_z)$ formează un set de operatori care au aceiași vectori proprii.

Vom nota valorile proprii ale lui J^2 cu $\hbar^2\alpha$ și a lui J_z cu $\hbar\beta$

$$\begin{cases} J^2|\alpha\beta\rangle = \hbar^2\alpha|\alpha\beta\rangle \\ J_z|\alpha\beta\rangle = \hbar\beta|\alpha\beta\rangle \end{cases}$$

Pp. că stările $\{|\alpha\beta\rangle\}$ formează un set ortonormat

$$\langle\alpha\beta|\alpha'\beta'\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} \qquad \delta_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 1, & \alpha=\alpha' \\ 0; & \alpha\neq\alpha' \end{cases}$$

$\langle\alpha\beta|\alpha\beta\rangle = 1$ și restul combinațiilor sunt zero.

Operatorii de ridicare J_+ și coborâre J_-

$$\boxed{J_+ = J_x + iJ_y; \quad J_- = J_x - iJ_y}$$

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \qquad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} [J^2, J_+] = 0 & [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \\ [J^2, J_-] = 0 & [J_z, J_+] = \hbar J_+ ; \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_- \end{array}}$$

$$\begin{cases} J_x^2 = \frac{1}{4}(J_+ + J_-)(J_+ + J_-) = \frac{1}{4}(J_+^2 + J_+J_- + J_-J_+ + J_-^2) \\ J_y^2 = -\frac{1}{4}(J_+^2 - J_+J_- - J_-J_+ + J_-^2) \end{cases}$$

$$J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{4}(\cancel{J_+^2} + J_+J_- + J_-J_+ + \cancel{J_-^2} - \cancel{J_+^2} + J_+J_- + J_-J_+ - \cancel{J_-^2})$$

$$= \frac{1}{2}(J_+J_- + \underbrace{J_-J_+}_{J_+J_- - 2\hbar J_z})$$

$$= J_+J_- - \hbar J_z$$

$$J_+J_- = \underbrace{J_x^2 + J_y^2}\ + \hbar J_z = \underbrace{J^2 - J_z^2}\ + \hbar J_z$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$
$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$$

$$\boxed{\begin{aligned} J^2 &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \\ J^2 &= J_+J_- + J_z^2 - \hbar J_z \\ J^2 &= J_-J_+ + J_z^2 + \hbar Z_z \end{aligned}}$$

Efectul aplicării lui J_+ și J_- asupra stării $|\alpha\beta\rangle$

$$\underbrace{J_z J_+}_{} |\alpha\beta\rangle \xrightarrow{\text{rel. comutare}} (J_+ \cdot J_z + \hbar J_+)|\alpha\beta\rangle = J_+(J_z|\alpha\beta\rangle) + \hbar J_+|\alpha\beta\rangle$$

$$= J_+ \cdot \beta\hbar|\alpha\beta\rangle + \hbar J_+|\alpha\beta\rangle = (\beta+1)\hbar / J_+|\alpha\beta\rangle)$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_z(J_+|\alpha\beta\rangle) &= (\beta+1)\hbar(J_+|\alpha\beta\rangle) \\ J_z(J_-|\alpha\beta\rangle) &= (\beta-1)\hbar(J_-|\alpha\beta\rangle) \end{aligned}} \quad (1)$$

deoarece $[J^2, J_\pm] = 0 \Rightarrow J^2 \cdot J_\pm = J_\pm J^2$

$$J^2(J_+|\alpha\beta\rangle) = J^2 J_+|\alpha\beta\rangle = J_+ J^2|\alpha\beta\rangle = \hbar^2\alpha J_+|\alpha\beta\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} J^2(J_+|\alpha\beta\rangle) &= \hbar^2\alpha(J_+|\alpha\beta\rangle) \\ J^2(J_-|\alpha\beta\rangle) &= \hbar^2\alpha(J_-|\alpha\beta\rangle) \end{aligned}} \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ stările $J_+|\alpha\beta\rangle$ și $J_-|\alpha\beta\rangle$ sunt stări proprii ale lui J^2 și J_z.

$$J_+ |\alpha\beta\rangle = C^+_{\alpha\beta} |\alpha, \beta+1\rangle \quad ; \quad J_- |\alpha\beta\rangle = C^-_{\alpha\beta} |\alpha, \beta-1\rangle .$$

Obs: J^2 are în general o valoare proprie maximă ptr α iar numărul cuantic β^2 nu poate fi mai mare ca și α.

$$\langle\alpha\beta| (J^2 - J_z^2) |\alpha\beta\rangle > 0$$

$$\langle\alpha\beta| \underbrace{J^2 |\alpha\beta\rangle} - \langle\alpha\beta| J_z^2 |\alpha\beta\rangle \geq 0$$

$$\langle\alpha\beta| \hbar^2 \alpha |\alpha\beta\rangle - \langle\alpha\beta| \hbar^2\beta^2 |\alpha\beta\rangle \geq 0$$

$$\hbar^2 \alpha \underbrace{\langle\alpha\beta|\alpha\beta\rangle}_{1} - \hbar^2\beta^2 \underbrace{\langle\alpha\beta|\alpha\beta\rangle}_{1} \geq 0$$

$$\hbar^2 (\alpha - \beta^2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha - \beta^2 \geq 0}$$

(consecință a faptului că $J^2 \geq J_z^2$)

$\Rightarrow$ există o valoare β_{max} ptr β.

există o stare $|\alpha\,\beta_{max}\rangle$ astfel încât:

$$\boxed{J_+ |\alpha\,\beta_{max}\rangle = 0}$$

$$\Rightarrow \quad J_-\left(J_+ |\alpha\beta_{max}\rangle\right) = 0 \qquad J_- J_+ |\alpha\beta_{max}\rangle = 0$$

Folosind: $J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |\alpha\beta_{max}\rangle = 0$$

$$\hbar^2 (\alpha - \beta_{max}^2 - \beta_{max}) |\alpha\beta_{max}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha - \beta_{max}^2 - \beta_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \beta_{max}(\beta_{max}+1)} \qquad (*)$$

În continuare aplicăm $J_- |\alpha\beta_{max}\rangle \rightarrow |\alpha\,\beta_{max}-1\rangle \ldots |\alpha\,\beta_{min}\rangle$

$$\boxed{J_- |\alpha\beta_{min}\rangle = 0}$$

$$J_+ J_- |\alpha\,\beta_{min}\rangle = 0$$

folosind: $J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$

$$(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z)|\alpha\, \beta_{min}\rangle = 0.$$

$$\hbar^2(\alpha - \beta_{min}^2 + \beta_{min})|\alpha\, \beta_{min}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta_{min}(\beta_{min} - 1)} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \beta_{max}(\beta_{max}+1) = \beta_{min}(\beta_{min}-1) \Rightarrow \boxed{\beta_{max} = -\beta_{min}}$$

$$\underbrace{\beta_{max}^2 + \beta_{max} - \beta_{min}^2}_{} + \beta_{min} = 0$$

$$(\beta_{max} - \beta_{min})(\beta_{max} + \beta_{min}) + (\beta_{max} + \beta_{min}) = 0$$

$$(\beta_{max} + \beta_{min})(\beta_{max} - \beta_{min} + 1) = 0$$

$$\beta_{max} + \beta_{min} = 0 \Rightarrow \beta_{max} = -\beta_{min}$$

Deoarece J_- scade valoarea lui β cu 1

$$\beta_{max} = \beta_{min} + n \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$2\beta_{max} = n \Rightarrow \boxed{j = \beta_{max} = \frac{n}{2}}$$

$$j = \beta_{max} \Rightarrow \boxed{\alpha = j(j+1)}$$

și suplimentar $\beta_{min} = -j$, dar $\beta_{min} \le \beta \le \beta_{max}$

$$\boxed{-j \le m \le j}$$

și ia $2j+1$ valori

$-j,\ -j+1,\ -j+2,\ \dots\ j-1,\ j$

$$\boxed{\begin{aligned} J^2|j\,m\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j\,m\rangle \\ J_z|j\,m\rangle &= \hbar\cdot m|j\,m\rangle \end{aligned}}$$

$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots$

și $-j \le m \le j$

cu

$$\langle j\, m | j' m' \rangle = \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}$$

$$J_+ |j\, m\rangle = c^+_{jm} |j, m+1\rangle \quad ; \quad J_- |jm\rangle = c^-_{jm} |j, m-1\rangle$$

$$\langle jm | J_- | J_+ | jm\rangle = \langle j, m+1| c^{+*}_{jm}\, c_{jm} | j\, m+1\rangle$$

$$(J_+)^+ = (J_x + iJ_y)^+ = J_x - iJ_y = J_-$$

$$\langle jm | J_- J_+ | jm\rangle = |c^+_{jm}|^2.$$

Folosind: $J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$

$$\langle jm | (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) | jm\rangle = |c^+_{jm}|^2$$

$$|c^+_{jm}|^2 = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 \cdot m^2 - \hbar^2 \cdot m$$

$$|c^+_{jm}|^2 = \hbar^2 \left(j(j+1) - m(m+1)\right)$$

Se alege c^+_{jm} - real

$$c^+_{jm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_+ |jm\rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j, m+1\rangle \\ J_- |jm\rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |j, m-1\rangle \end{aligned}}$$

Relațiile se mai rescrie:

$$\boxed{\begin{aligned} J_+ |jm\rangle &= \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\, |j, m+1\rangle \\ J_- |jm\rangle &= \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, |j, m-1\rangle \end{aligned}}$$

Reprezentarea matricială a momentului cinetic

$\{J^2, J_z\}$ - reprezintă un set de 2 operatori care comută, deci ei au vectori proprii comuni $\{|jm\rangle\}$.

Setul de stări $\{|jm\rangle\}$ formează o bază completă și ortonormată.

$$\begin{cases} \langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \\ \sum_{m=-j}^{j} |jm\rangle\langle jm| = \mathbb{1} \end{cases}$$

Dorim să găsim reprezentarea componentelor momentului cinetic în format matricial

$$\langle j'm'|J^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)\cdot \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

$$\langle j'm'|J_z|jm\rangle = m\hbar\, \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

$$\langle j'm'|J_+|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\, \delta_{jj'}\cdot\delta_{m',m+1}$$

$$\langle j'm'|J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\, \delta_{jj'}\delta_{m',m-1}$$

Problemă Se consideră $j=1$

a) Să se găsească reprezentarea matricială pentru $J^2, J_z, J_+, J_-, J_x, J_y$

b) Să se determine stările proprii pentru J^2 și J_z și să se verifică că formează o bază completă și ortonormată.

c) Folosind reprezentările matriciale pentru J_x, J_y, J_z să se calculeze comutatorii $[J_x, J_y]$, $[J_y, J_z]$, $[J_z, J_x]$

Deoarece $j = 1$, valorile admise pentru m sunt

$-j < m < j \Rightarrow m \in \{-1, 0, 1\}.$

$\{|j, m\rangle\}$ devine: $\{|1,-1\rangle \quad |1,0\rangle \quad |1,1\rangle\}$

$$J^2 = \begin{pmatrix} \langle 1\,1|\underbrace{J^2|1\,1\rangle} & \langle 1\,1|J^2|1\,0\rangle & \langle 1\,1|J^2|1\,-1\rangle \\ \langle 1\,0|J^2|1\,1\rangle & \langle 1\,0|J^2|1\,0\rangle & \langle 1\,0|J^2|1\,-1\rangle \\ \langle 1\,-1|J^2|1\,1\rangle & \langle 1\,-1|J^2|1\,0\rangle & \langle 1\,-1|J^2|1\,-1\rangle \end{pmatrix}$$

$M_{3\times 3}.$

$$\underbrace{J^2|1\,1\rangle} = \hbar^2 \cdot 1\,(1+1)\,|1\,1\rangle = \underbrace{2}\hbar^2\,|1\,1\rangle$$

$$J^2|1\,0\rangle = 2\hbar^2\,|1\,0\rangle$$

$$J^2|1\,-1\rangle = 2\hbar^2\,|1\,-1\rangle$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2\hbar^2\,\overbrace{\langle 1\,1|1\,1\rangle}^{1} & 2\hbar^2\,\overbrace{\langle 1\,1|1\,0\rangle}^{0} & 2\hbar^2\,\overbrace{\langle 1\,1|1\,-1\rangle}^{0} \\ 2\hbar^2\,\overbrace{\langle 1\,0|1\,1\rangle}^{0} & 2\hbar^2\,\underbrace{\langle 1\,0|1\,0\rangle}_{1} & 2\hbar^2\,\langle 1\,0|1\,-1\rangle \\ 2\hbar^2\,\langle 1\,-1|1\,1\rangle & 2\hbar^2\,\langle 1\,-1|1\,0\rangle & 2\hbar^2\,\underbrace{\langle 1\,-1|1\,-1\rangle}_{1} \end{pmatrix}$$

$$\langle j'm'|jm\rangle = \delta_{jj'}\,\delta_{mm'}$$

$$\boxed{J^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$J_z = \begin{pmatrix} \langle 1\,1|\underbrace{J_z|1\,1\rangle} & \langle 1\,1|J_z|1\,0\rangle & \langle 1\,1|J_z|1\,-1\rangle \\ \langle 1\,0|J_z|1\,1\rangle & \langle 1\,0|J_z|1\,0\rangle & \langle 1\,0|J_z|1\,-1\rangle \\ \langle 1\,-1|J_z|1\,1\rangle & \langle 1\,-1|J_z|1\,0\rangle & \langle 1\,-1|J_z|1\,-1\rangle \end{pmatrix}$$

$$J_z\,|\underset{j}{1}\,\underset{m}{1}\rangle = \underset{m}{1}\cdot\hbar\,|1\,1\rangle$$

$$\langle 1\,1|J_z|1\,1\rangle = \langle 1\,1|\,1\cdot\hbar\,|1\,1\rangle = \hbar\,\langle 1\,1|1\,1\rangle = \underline{\underline{1\cdot\hbar}}$$

$J_z\,|1\,0\rangle = 0\cdot\hbar\,|1\,0\rangle = 0$

$\quad\ \uparrow\ \ \uparrow$

$\quad\ j\ \ \ m$

$J_z\,|1\,-1\rangle = -1\cdot\hbar\,|1,-1\rangle \Rightarrow \langle 1,-1|J_z|1,-1\rangle = \underline{\underline{-\hbar}}.$

$\quad\ \uparrow\ \ \uparrow$

$\quad\ j\ \ \ m$

$$\boxed{J_z = \hbar\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Reprezentarea matricială a lui J_+

$j=1,\ m=0$

$$J_+ = \begin{pmatrix} \langle 1\,1|J_+|1\,1\rangle & \langle 1\,1|J_+|1\,0\rangle & \langle 1\,1|J_+|1\,-1\rangle \\ \langle 1\,0|J_+|1\,1\rangle & \langle 1\,0|J_+|1\,0\rangle & \langle 1\,0|J_+|1\,-1\rangle \\ \langle 1\,-1|J_+|1\,1\rangle & \langle 1\,-1|J_+|1\,0\rangle & \langle 1\,-1|J_+|1\,-1\rangle \end{pmatrix}$$

$J_+\,|1\,1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1+1)}\ |\,?\,\rangle = 0.$

$\quad j\ \uparrow\ \uparrow\ m \qquad\qquad \uparrow j \qquad \uparrow m$

$|1\,1\rangle \sim |j,j\rangle$

$\Rightarrow$ prima coloană este 0.

$J_+\,|1\,0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)}\ |1\,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1\,1\rangle$

$\quad\ \uparrow\ \ \uparrow$

$\quad\ j\ \ \ m$

$J_+\,|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) + 1(1-1)} = \hbar\sqrt{2}\,|1\,0\rangle$

$$\boxed{J_+ = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$J_- = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \langle 1\,1|J_-|1\,1\rangle & \langle 1\,1|J_-|1\,0\rangle & \langle 1\,1|J_-|1\,-1\rangle \\ 2 & \langle 1\,0|J_-|1\,1\rangle & \langle 1\,0|J_-|1\,0\rangle & \langle 1\,0|J_-|1\,-1\rangle \\ 3 & \langle 1\,-1|J_-|1\,1\rangle & \langle 1\,-1|J_-|1\,0\rangle & \langle 1\,-1|J_-|1\,-1\rangle \end{array}$$

$$J_-|1\,1\rangle = \underline{\hbar\sqrt{2}}\,|1\,0\rangle$$

$$\langle 1\,1|J_-|1\,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,\underbrace{\langle 1\,1|1\,0\rangle}_{0} = 0.$$

$$J_-|\underset{j}{1}\,\underset{m}{0}\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|\underset{j}{1}\,\underset{m-1}{-1}\rangle$$

$$\boxed{J_- = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{J_+ = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$J_- = J_x - iJ_y$$
$$J_+ = J_x + iJ_y \quad \Rightarrow \quad J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$
$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

$$\boxed{J_x = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{J_y = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{J_z = \hbar\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

c) $[J_x, J_y] = J_x\cdot J_y - J_y\cdot J_x$

$$= \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{\hbar\sqrt{2}}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{\hbar\sqrt{2}}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2i}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{i} = -i$

$$= -\frac{\hbar^2}{\cancel{2}} \cdot i(-\cancel{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i\hbar \cdot \underbrace{\hbar \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{J_z}$$

$$\boxed{[J_x, J_y] = i\hbar J_z}$$

b) reprezentarea stărilor $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ ca și vectori proprii ptr J^2 și J_z

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ec. de vect. și valori proprii:

$$J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle$$

$$\cancel{\hbar} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = m\cancel{\hbar} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$m \in \{-1, 0, 1\}$.

ptr $m = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow$

$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unde am ales $a = 1$ a.î. $|11\rangle$ să fie normată.

$$\langle 11| = (a^* \;\; 0 \;\; 0)$$

$$\langle 11 | 11 \rangle = (a^* \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |a|^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\boxed{|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ptr $m = 0 \Rightarrow$ $\boxed{|1,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$m = -1 \Rightarrow$ $\boxed{|1,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$\{ |1,1\rangle ; |1,0\rangle ; |1,-1\rangle \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Normarea:

$$\{ \langle 1,1| \quad \langle 1,0| ; \langle 1,-1| \} = \{ (1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1) \}$$

(hermitic conjugat)

= transpus + *

$$(1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle 1 1 | 1 1 \rangle = 1 \qquad \langle 1 0 | 1 0 \rangle = 1 \qquad \langle 1\ -1 | 1\ -1 \rangle = 0$$

$$(1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle 1 1 | 1 0 \rangle = 0 \qquad \langle 1 1 | 1\ -1 \rangle = 0$$

=> stările sunt normate

Rel. de completitudine $\sum_{m=-j}^{j} |jm\rangle\langle jm| = \mathbb{1}_{2j+1}$

$$|1 1\rangle\langle 1 1| + |1 0\rangle\langle 1 0| + |1\ -1\rangle\langle 1,-1| = \mathbb{1}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0,0,1) = \mathbb{1}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$