Momentul cinetic

In mecanica clasică momentul cinetic este definit ca:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (yp_z - zp_y)\vec{i} + (zp_x - xp_z) + (xp_y - yp_x)\vec{k}$$
$$= L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}.$$

In mecanica cuantică se definește operatorul moment cinetic

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} \to \hat{\vec{r}} = \vec{r} \\ \vec{p} \to \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

$$\boxed{\hat{\vec{L}} = -i\hbar\, \vec{r} \times \vec{\nabla}}$$ – op. moment cinetic

$$\vec{\nabla} = \partial_x \vec{i} + \partial_y \vec{j} + \partial_z \vec{k}$$

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y)\vec{i}$$
$$- i\hbar(z\partial_x - x\partial_z)\vec{j} - i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \end{aligned}}$$

– componentele carteziene ale operatorului moment cinetic

Relațiile de comutare:

$$[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z]$$
$$= [yp_z, zp_x] - \underbrace{[yp_z, xp_z]}_{=0} - \underbrace{[zp_y, zp_x]}_{=0} + [zp_y, xp_z]$$
$$-i\hbar\, yp_x + i\hbar\, xp_y = i\hbar(xp_y - yp_x)$$

$$\boxed{[L_x, L_y] = i\hbar L_z}$$

Restul comutatorilor se obțin efectuând permutări ciclice

$$x \to y \to z \to x$$

$$\boxed{[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad ; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad\quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y}$$

<u>Exemple</u>: a) Să se calculeze comutatorii: $[x, L_x]$, $[x, L_y]$ și $[x, L_z]$, $[p_x, L_x]$, $[p_x, L_y]$, $[p_x, L_z]$, $[x, L^2]$, $[p_x, L^2]$

$$[x, L_x] = [x, y p_z - z p_y] = 0$$

$$[x, L_y] = [x, z p_x - x p_z] = [x, z p_x] = i\hbar z$$

$$[x, L_z] = [x, x p_y - y p_x] = -[x, y p_x] = -i\hbar y$$

$$[p_x, L_x] = [p_x, y p_z - z p_y] = 0$$

$$[p_x, L_y] = [p_x, z p_x - x p_z] = -[p_x, x p_z] = i\hbar p_z$$

$$[p_x, L_z] = [p_x, x p_y - y p_x] = [p_x, x p_y] = -i\hbar p_y$$

$$[x, L^2] = [x, L_x^2] + [x, L_y^2] + [x, L_z^2]$$

$$= L_x \underbrace{[x, L_x]}_{=0} + \underbrace{[x, L_x]}_{=0} L_x + L_y [x, L_y] + [x, L_y] L_y + L_z [x, L_z] + [x, L_z] L_z$$

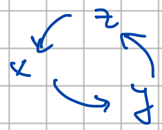
$$\boxed{[x, L^2] = i\hbar \left(L_y \cdot z + z L_y - L_z \cdot y - y \cdot L_z \right)}$$

$$[p_x, L^2] = \underbrace{[p_x, L_x^2]}_{=0} + [p_x, L_y^2] + [p_x, L_z^2]$$

$$= L_y [p_x, L_y] + [p_x, L_y] L_y + L_z [p_x, L_z] + [p_x, L_z] L_z$$

$$\boxed{[p_x, L^2] = i\hbar \left(L_y p_z + p_z L_y - L_z p_y - p_y L_z \right)}$$

Din nou, Restul comutatorilor se obțin efectuând permutări ciclice



$x \to y \to z \to x$

Formalismul general al momentului cinetic

Definiție:

Un operator $\hat{J}$ care are trei componente J_x, J_y și J_z care satisfac relațiile de comutare

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad , \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x \quad , \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

sau, echivalent, $\vec{J} \times \vec{J} = i\hbar \vec{J}$

se numește moment cinetic

Momentul cinetic la pătrat $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ și J^2 comută cu toate componentele

$$[J^2, J_x] = \underbrace{[J_x^2, J_x]}_{0} + [J_y^2 ; J_x] + [J_z^2, J_x]$$

$$= J_y \underbrace{[J_y, J_x]}_{-i\hbar J_z} + \underbrace{[J_y, J_x]}_{-i\hbar J_z} J_y + J_z \underbrace{[J_z, J_x]}_{i\hbar J_y} + [J_z, J_x] J_z$$

$$= i\hbar \left(- J_y J_z - J_z J_y + J_z J_y + J_y J_z \right) = 0.$$

$$[J^2, J_x] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{J^2 \text{ comută cu } J_x, J_y \text{ și } J_z}$$

Stările proprii și valorile proprii ale op. moment cinetic

deoarece J^2 comută cu J_x, J_y, J_z $\Rightarrow$ J^2 poate fi diagonalizat împreună cu una dintre componente. Prin convenție se alege J_z. $\Rightarrow$ (J^2, J_z) formează un set de operatori care au aceiași vectori proprii.

Vom nota valorile proprii ale lui J^2 cu $\hbar^2\alpha$ și a lui J_z cu $\hbar \cdot \beta$

$$\begin{cases} J^2 |\alpha\beta\rangle = \hbar^2 \alpha |\alpha\beta\rangle \\ J_z |\alpha\beta\rangle = \hbar \beta |\alpha\beta\rangle \end{cases}$$

Pp. că stările $\{|\alpha\beta\rangle\}$ formează un set ortonormat

$$\langle\alpha\beta|\alpha'\beta'\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} \qquad \delta_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 1, & \alpha = \alpha' \\ 0; & \alpha \neq \alpha' \end{cases}$$

$\langle\alpha\beta|\alpha\beta\rangle = 1$ și restul combinațiilor sunt zero.

Operatorii de ridicare J_+ și coborâre J_-

$$\boxed{J_+ = J_x + iJ_y; \quad J_- = J_x - iJ_y}$$

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \qquad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

$$\boxed{\begin{matrix} [J^2, J_+] = 0 & [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \\ [J^2, J_-] = 0 & [J_z, J_+] = \hbar J_+; \ [J_z, J_-] = -\hbar J_- \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} J_x^2 = \frac{1}{4}(J_+ + J_-)(J_+ + J_-) = \frac{1}{4}(J_+^2 + J_+J_- + J_-J_+ + J_-^2) \\ J_y^2 = -\frac{1}{4}(J_+^2 - J_+J_- - J_-J_+ + J_-^2) \end{cases}$$

$$J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{4}(\cancel{J_+^2} + J_+J_- + J_-J_+ + \cancel{J_-^2} - \cancel{J_+^2} + J_+J_- + J_-J_+ - \cancel{J_-^2})$$

$$= \frac{1}{2}(J_+J_- + \underbrace{J_-J_+}_{J_+J_- - 2\hbar J_z})$$

$$= J_+J_- - \hbar J_z$$

$$J_+J_- = \underbrace{J_x^2 + J_y^2}_{} + \hbar J_z = \underbrace{J^2 - J_z^2}_{} + \hbar J_z$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$
$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}\left(J_+ J_- + J_- J_+\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} J^2 &= \frac{1}{2}\left(J_+ J_- + J_- J_+\right) + J_z^2 \\ J^2 &= J_+ J_- + J_z^2 - \hbar J_z \\ J^2 &= J_- J_+ + J_z^2 + \hbar Z_z \end{aligned}}$$

Efectul aplicării lui J_+ și J_- asupra stării $|\alpha\beta\rangle$

$$J_z J_+ |\alpha\beta\rangle = \left(J_+ \cdot J_z + \hbar J_+\right)|\alpha\beta\rangle = J_+\left(J_z |\alpha\beta\rangle\right) + \hbar J_+ |\alpha\beta\rangle$$

rel. comutare

$$= J_+ \cdot \beta\hbar |\alpha\beta\rangle + \hbar J_+ |\alpha\beta\rangle = (\beta+1)\hbar \left(J_+ |\alpha\beta\rangle\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_z\left(J_+ |\alpha\beta\rangle\right) &= (\beta+1)\hbar\left(J_+ |\alpha\beta\rangle\right) \\ J_z\left(J_- |\alpha\beta\rangle\right) &= (\beta-1)\hbar\left(J_- |\alpha\beta\rangle\right) \end{aligned}} \qquad (1)$$

deoarece $[J^2, J_\pm] = 0 \Rightarrow J^2 \cdot J_\pm = J_\pm J^2$

$$J^2\left(J_+ |\alpha\beta\rangle\right) = J^2 J_+ |\alpha\beta\rangle = J_+ J^2 |\alpha\beta\rangle = \hbar^2 \alpha J_+ |\alpha\beta\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} J^2\left(J_+ |\alpha\beta\rangle\right) &= \hbar^2 \alpha \left(J_+ |\alpha\beta\rangle\right) \\ J^2\left(J_- |\alpha\beta\rangle\right) &= \hbar^2 \alpha \left(J_- |\alpha\beta\rangle\right) \end{aligned}} \qquad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ stările $J_+|\alpha\beta\rangle$ și $J_-|\alpha\beta\rangle$ sunt stări proprii ale lui J^2 și J_z.

$$J_+ |\alpha\beta\rangle = C^+_{\alpha\beta} |\alpha, \beta+1\rangle \quad ; \quad J_- |\alpha\beta\rangle = C^-_{\alpha\beta} |\alpha, \beta-1\rangle .$$

Obs: J^2 are în general o valoare proprie maximă ptr α

iar

$$\langle\alpha\beta|\left(J^2 - J_z^2\right)|\alpha\beta\rangle > 0$$

$$\underbrace{\langle\alpha\beta|J^2|\alpha\beta\rangle} - \langle\alpha\beta|J_z^2|\alpha\beta\rangle > 0$$

$$\beta_{max} + \beta_{min} = 0 \Rightarrow \beta_{max} = -\beta_{min}.$$

Deoarece J_- scade valoarea lui β cu 1

$$\beta_{max} = \beta_{min} + n \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$2\beta_{max} = n \Rightarrow \boxed{j = \beta_{max} = \frac{n}{2}}$$

$$j = \beta_{max} \Rightarrow \boxed{\alpha = j(j+1)}$$

și suplimentar β