Curs 8

Oscilatorul armonic

- una dintre problemele importante în toate ramurile fizicii.
- o particulă care se mișcă într-un potențial $\sim x^2$, execută o mișcare de tip oscilator armonic.

$$\boxed{H = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{energie cinetică}} + \underbrace{\frac{1}{2} m\omega^2 x^2}_{\text{energie potențială}}}$$

obs:
Ec. Schrödinger pentru Hamiltonianul de tip oscilator armonic poate fi rezolvată exact.

Introducem coordonatele adimensionale

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{P^2}{m\hbar\omega} + \frac{m\omega}{\hbar}\cdot x^2\right)$$

p - impulsul adimensional

q - poziție adimensională

(p, q) - coordonate generalizate adimensionale

$$p = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}} \Rightarrow \frac{P^2}{m\hbar\omega} = p^2$$

$$q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot x \Rightarrow \frac{m\omega}{\hbar}x^2 = q^2.$$

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(p^2 + q^2)$$

Introducem operatorii de creere/anihilare.

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \quad ; \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)}$$

$$a^+ \cdot a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) = \frac{1}{2}(q - ip)(q + ip)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(q^2 \underbrace{- ip\cdot q + iqp}_{} + p^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2 + i[q, p]\right)$$

$$a^+ a = \frac{1}{2}(p^2+q^2) + \frac{i}{2}[q,p].$$

$$[X, P] = i\hbar$$

$$[q,p] = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot X, \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right] = \frac{1}{\hbar}[X,P] = \frac{1}{\hbar}\cdot i\hbar = i$$

$$a^+ a = \frac{1}{2}(p^2+q^2) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(p^2+q^2) = a^+ a + \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$ Hamiltonianul ptr oscilatorul armonic :

$$\boxed{H = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad N = a^+ a}$$

$N = a^+ a$ = operatorul număr de particule, sau operatorul de ocupare.

Relațiile de comutare între a și a^+

$$[a, a^+] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip), \frac{1}{\sqrt{2}}(q-ip)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[q+ip, q-ip] = -\frac{i}{2}\underbrace{[q,p]}_{i} + \frac{i}{2}\underbrace{[p,q]}_{-i}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{[a, a^+] = 1}$$

Operatorii care satisfac astfel de relații de comutare se numesc operatori de anihilare și creere bosonici.

Valorile proprii ale energiei :

Hamiltonianul depinde doar de operatorul N, deci

$$[H, N] = 0 \quad ; \quad \left[\hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right), N\right] = \hbar\omega[N,N] = 0.$$

<u>obs 11.</u> Doi operatori Hermitici care comută au vectori proprii comuni

$\Rightarrow$ H, și N au același set de vectori proprii.

Vom nota $\{|n\rangle\}$ vectorii proprii ai lui N.

$$N|n\rangle = n\cdot|n\rangle \qquad H\cdot|n\rangle = E_n|n\rangle$$

operatorul nr. de part. — valoarea proprie — vectorul propriu

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$ – energiile proprii pentru oscilatorul armonic

<u>Relațiile de comutare între a, a^+, H.</u> $\left([a, a^+] = 1\right)$

$$[a, H] = \left[a, \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\right] = \hbar\omega[a, a^+a]$$

$$= \hbar\omega\underbrace{[a, a^+]}_{1}\cdot a = \hbar\omega\cdot a$$

$$\boxed{[a, H] = \hbar\omega a}$$

$$[a^+, H] = \hbar\omega[a^+, a^+a] = -\hbar\omega a^+ \qquad \boxed{[a^+, H] = -\hbar\omega a^+}$$

$$H\left(a|n\rangle\right) = H\cdot a|n\rangle = (aH - \hbar\omega a)|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)(a|n\rangle)$$

$$[a, H] = aH - Ha = \hbar\omega a \Rightarrow H\cdot a = aH - \hbar\omega a$$

$$\boxed{H\left(a|n\rangle\right) = (E_n - \hbar\omega)(a|n\rangle)}$$

$$\boxed{H\left(a^+|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)(a^+|n\rangle)}$$

$\Rightarrow$ $\{a|n\rangle\}$ și $\{a^+|n\rangle\}$ sunt stări proprii ai lui H cu valori proprii $E_n - \hbar\omega$ și $E_n + \hbar\omega$.

Relațiile de comutare dintre a, a^+, N sunt.

$$\boxed{\begin{array}{ll} [a, N] = a; & [N, a] = -a \\ [a^+, N] = -a^+; & [N, a^+] = a^+ \end{array}}$$

$$N(a|n\rangle) = (aN - a)|n\rangle = (n-1)(a|n\rangle)$$

$$\boxed{N(a|n\rangle) = (n-1)(a|n\rangle)} \qquad \boxed{N(a^+|n\rangle) = (n+1)\, a^+|n\rangle}$$

$\{a|n\rangle\}$ și $\{a^+|n\rangle\}$ sunt stări proprii pentru operatorul $\hat{N}$.

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \to \quad N(a|n\rangle) = (n-1)(a|n\rangle)$$

$$\Rightarrow a|n\rangle \sim |n-1\rangle \qquad N|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle$$

$$a|n\rangle = c_n|n-1\rangle$$

a - operator de anihilare sau operator de coborâre.

$$(a|n\rangle)^+ = \langle n|a^+$$

$$(\langle n|a^+)(a|n\rangle) = \langle n|\underbrace{a^+a}_{N}|n\rangle = \langle n|\underbrace{N|n\rangle}_{} =$$

$$= \langle n|(n|n\rangle) = n\underbrace{\langle n|n\rangle}_{1} = n.$$

$$(\langle n|a^+)(a|n\rangle) = \langle n-1|c_n^* \cdot c_n|n-1\rangle = |c_n|^2 \cdot \langle n-1|n-1\rangle$$

$$= |c_n|^2.$$

$$|c_n|^2 = n \qquad \Rightarrow \qquad c_n = \sqrt{n}$$

$$\boxed{a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

Dintr-o stare $|n\rangle$, aplicând consecutiv operatorul de anihilare obținem o stare cu $(n-1)$, $(n-2)$... particule

$n > 0$: $\Rightarrow$ În starea $|0\rangle$ - stare de vid nu mai avem nici o particulă

$$a|0\rangle = \sqrt{0}\,|?\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a|0\rangle = 0}$$

În mod analog putem arăta că: $\boxed{a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle}$

Dacă aplicăm repetat a^+ asupra stării $|n\rangle$, vom genera o secvență infinită de stări $|n+1\rangle$, $|n+2\rangle$ ....

n - este un nr întreg și caract. spectrul energetic al oscilatorului armonic

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots}$$

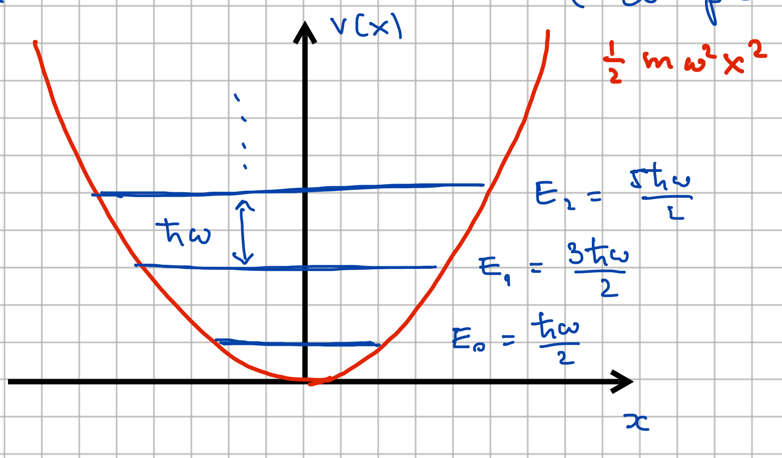
Starea de vid cu $n=0$, $|0\rangle$, are energia $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$.
(energia de zero, sau energia vidului)

Toate stările $|n\rangle$ pot fi obținute aplicând operatorul a^+ în mod succesiv.

Stările astfel obținute sunt ortonormate și formează o bază:

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & n = n' \\ 0; & n \neq n' \end{cases} \qquad \text{(ortonormare)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1} \qquad \text{(completitudine)}$$



Funcțiile de undă ale oscilatorului armonic

$$\hat{p} = \frac{\hat{P}}{\sqrt{m\hbar\omega}} = -\frac{i\hbar}{\sqrt{m\hbar\omega}} \cdot \frac{d}{dx} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \cdot \frac{d}{dx}$$

Notăm cu $\boxed{x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}$ - lungimea caracteristică a oscilatorului armonic

$$\boxed{p = -i x_0 \cdot \frac{d}{dx}} \qquad q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot X = \frac{1}{x_0} \cdot X.$$

$$\boxed{q = \frac{1}{x_0} \cdot X}$$

Operatorul de anihilare este:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x_0} \cdot X + x_0 \cdot \frac{d}{dx}\right)$$

expresiile explicite ptr operatorii de anihilare / creere în spațiul real. $\leftarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}\, x_0}\left(X + x_0^2 \cdot \frac{d}{dX}\right) \\ a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}\, x_0}\left(X - x_0^2 \cdot \frac{d}{dX}\right) \end{aligned}}$$

Ptr starea de vid $|0\rangle$ avem $a|0\rangle = 0$. În reprezentarea de poziție:

$$\langle x | a | 0 \rangle = 0$$

$$\langle x | \frac{1}{\sqrt{2}\, x_0}\left(X + x_0^2 \cdot \frac{d}{dx}\right) | 0 \rangle = 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\, x_0}\Big[x \langle x | 0 \rangle + x_0^2 \cdot$$

$$\left(- \frac{x}{x} \right.$$