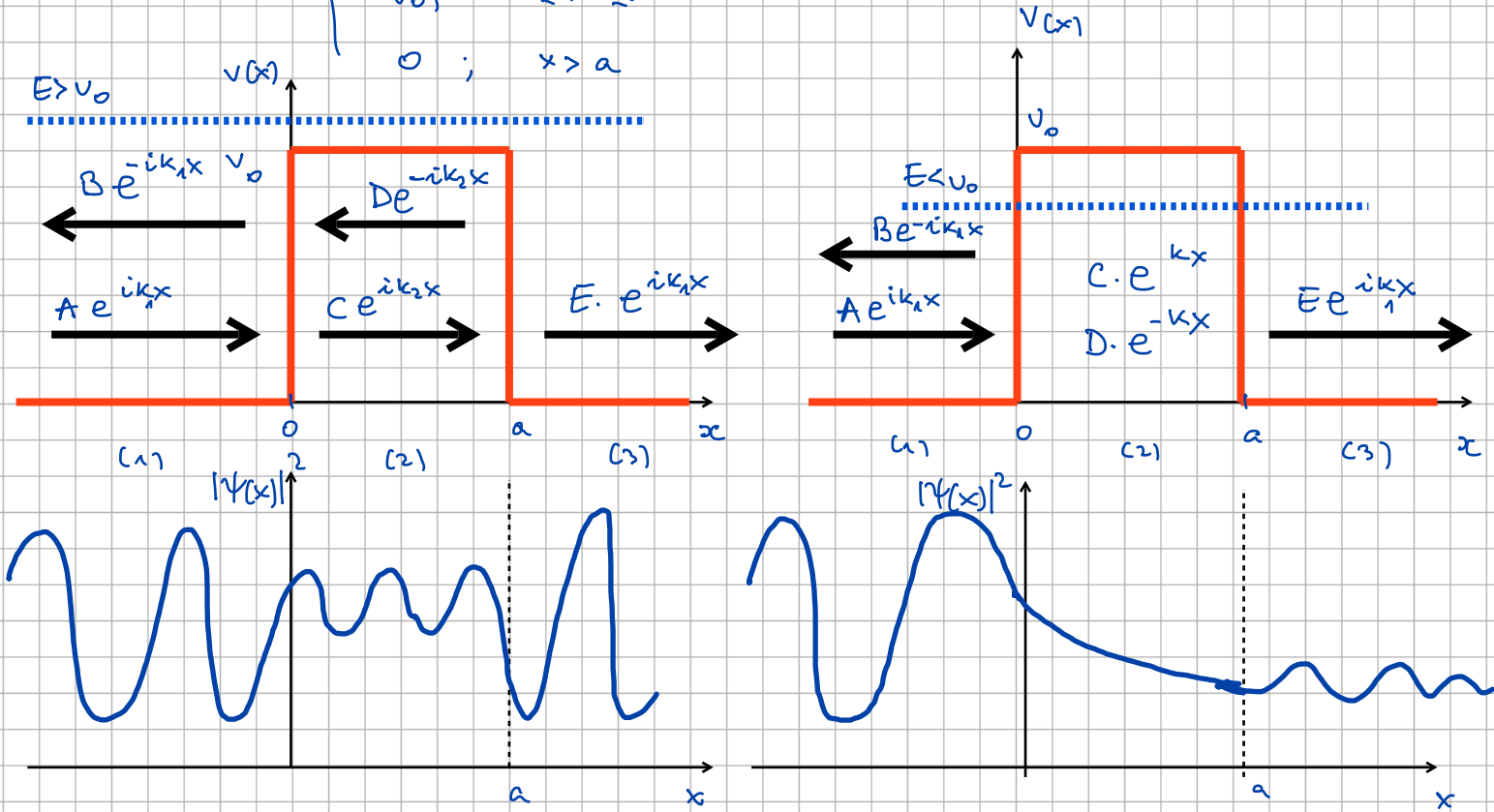


Bariera de potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ V_0; & 0 \leq x \leq a \\ 0; & x > a \end{cases}$$



$E > V_0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & ; & x < 0 \\ \psi_2(x) & ; & 0 \leq x \leq a \\ \psi_3(x) & ; & x > a \end{cases}$$

(1): $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_1''(x) = E \psi_1(x) \quad | \cdot \left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi_1''(x) + k_1^2 \psi_1(x) = 0$$

$$\psi_1(x) = A \cdot e^{ik_1x} + B \cdot e^{-ik_1x}$$

(3): $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_3''(x) = E \psi_3(x) \Rightarrow \psi_3(x) = E \cdot e^{ik_1x} + F \cdot e^{-ik_1x}$
 fără semnificație fizică.

$$(2) : -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_2''(x) + V_0 \Psi_2(x) = E \Psi_2(x) \quad \int \cdot \left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$$

$$\Psi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \cdot \Psi_2(x) = 0$$

$$\Psi_2''(x) + k_2^2 \Psi_2(x) = 0$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)$$

$$\Psi_2(x) = C \cdot e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} & ; \quad x < 0 \\ \Psi_2(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x} & ; \quad 0 \leq x \leq a \\ \Psi_3(x) = E e^{ik_1 x} & ; \quad x > a \end{cases}$$

$A e^{ik_1 x}$ - undă incidentă

$B e^{-ik_1 x}$ - undă reflectată la $x=0$.

$E \cdot e^{ik_1 x}$ - undă transmisă la $x=a$.

$C \cdot e^{ik_2 x}$ - undă transmisă la $x=0$

$D e^{-ik_2 x}$ - undă reflectată la $x=a$

Avem un total de 5 necunoscute A, B, C, D, E și doar 4 ecuații din care dăm minim B, C, D, E ca funcție de A - amplitudinea undei incidente.

Din condiția de continuitate și derivabilitate a pot de undă:

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0)$$

$$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0)$$

$$\Psi_2(a) = \Psi_3(a)$$

$$\Psi_2'(a) = \Psi_3'(a)$$

$$\Psi'(x) = \begin{cases} \Psi_1'(x) = ik_1 \cdot A e^{ik_1 x} - ik_1 B e^{-ik_1 x} & x < 0 \\ \Psi_2'(x) = ik_2 C e^{ik_2 x} - ik_2 D e^{-ik_2 x} & 0 < x < a \\ \Psi_3'(x) = ik_1 E e^{ik_1 x} & x > a \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B = C+D \\ C \cdot e^{ik_2 a} + D e^{-ik_2 a} = E \cdot e^{ik_1 a} \\ ik_1(A-B) = ik_2(C-D) \\ ik_2(C \cdot e^{ik_2 a} - D e^{-ik_2 a}) = ik_1 E e^{ik_1 a} \end{cases}$$

\Rightarrow rezolvăm sistemul B, C, D, E ca funcție de A .

Dorim să determinăm coeficientul de transmisie din zona (1) în zona (3)

$$T = \frac{|j_{\text{transmis, 3}}|}{|j_{\text{incident, 1}}|}$$

$$j_{\text{incident, 1}} = \frac{h \cdot k_1}{m} \cdot |A|^2 \quad ; \quad T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \left| \frac{E}{A} \right|^2$$

$$j_{\text{transmis, 3}} = \frac{h \cdot k_1}{m} \cdot |E|^2$$

$$E = \frac{4k_1 k_2 \cdot A \cdot e^{-ik_1 a}}{4k_1 k_2 \cdot \cos k_2 a - 2i(k_1^2 + k_2^2) \cdot \sin k_2 a} \quad E \in \mathbb{C}$$

$$\frac{E}{A} = \frac{e^{-ik_1 a}}{\cos k_2 a - i \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \cdot \sin k_2 a}$$

$$\left| \frac{E}{A} \right|^2 = \frac{1}{\cos^2 k_2 a + \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \cdot \sin^2 k_2 a}$$

$$\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2$$

$$\left| \frac{E}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \cdot \sin^2 k_2 a}$$

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \cdot \sin^2 k_2 a}$$

- coeficientul de tunelare (transmisie)

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)}$$

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \cdot E \\ k_2^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_1^2 - k_2^2 &= \frac{2m V_0}{\hbar^2} \\ 2 k_1 \cdot k_2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{E(E - V_0)} \end{aligned}$$

E < V₀

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & ; \quad x < 0 \\ \psi_2(x) & ; \quad 0 \leq x \leq a \\ \psi_3(x) & ; \quad x > a \end{cases}$$

$$(1): \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_1''(x) = E \psi_1(x) \quad | \cdot \left(-\frac{2m}{\hbar^2} \right)$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi_1''(x) + k_1^2 \psi_1(x) = 0$$

$$\psi_1(x) = A \cdot e^{ik_1 x} + B \cdot e^{-ik_1 x}$$

$$(3): \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_3''(x) = E \psi_3(x) \quad \Rightarrow \quad \psi_3(x) = E \cdot e^{ik_1 x} + F e^{-ik_1 x}$$

fără semnificație fizică.

$$(2): \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_2''(x) + V_0 \psi_2(x) = E \psi_2(x) \quad | \left(-\frac{2m}{\hbar^2} \right)$$

$$\psi_2''(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \cdot \psi_2(x) = 0.$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

$$\psi_2(x) = C e^{kx} + D e^{-kx}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x} & ; \quad x < 0 \\ \psi_2(x) = C e^{kx} + D e^{-kx} & ; \quad 0 \leq x \leq a \\ \psi_3(x) = E e^{ik_1x} & ; \quad x > a \end{cases}$$

Din condiția de continuitate și derivabilitate a fact de undă:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a)$$

$$\psi_2'(a) = \psi_3'(a)$$

$$\psi'(x) = \begin{cases} \psi_1'(x) = ik_1 A e^{ik_1x} - ik_1 B e^{-ik_1x} & x < 0 \\ \psi_2'(x) = k C e^{kx} - k D e^{-kx} & 0 < x < a \\ \psi_3'(x) = ik_1 E e^{ik_1x} & x > a \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ C \cdot e^{ka} + D e^{-ka} = E \cdot e^{ik_1 a} \\ ik_1(A - B) = k(C - D) \\ k(C e^{ka} - D e^{-ka}) = ik_1 E e^{ik_1 a} \end{cases}$$

Se determină amplitudinile B, C, D, E ca funcție de amplitudinea undei incidente A.

Ne interesează coeficientul de transmisie: $T = \left| \frac{E}{A} \right|^2$

$$\frac{E}{A} = 2 \cdot e^{-ik_1 a} \cdot \frac{1}{2 \cosh k \cdot a + i \frac{k^2 - k_1^2}{k \cdot k_1} \cdot \sinh k a}$$

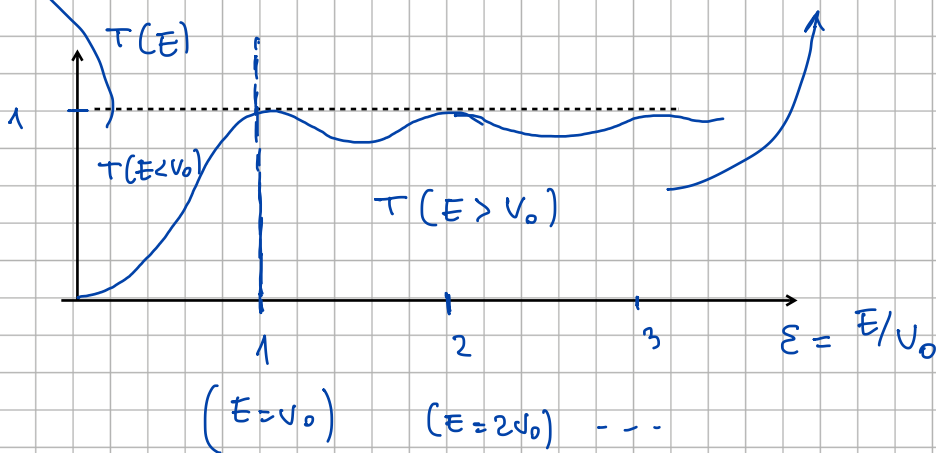
$$\left| \frac{E}{A} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2 k a + \left(\frac{k^2 - k_1^2}{2k k_1} \right)^2 \cdot \sinh^2 k a} \quad (-\sinh^2 k a + \sinh^2 k a)$$

$$T(E < V_0) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 + k_1^2}{2k k_1} \right)^2 \cdot \sinh^2 k a}$$

$E < V_0$

$$T(E > V_0) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \cdot \sin^2 k_2 a}$$

; $E > V_0$

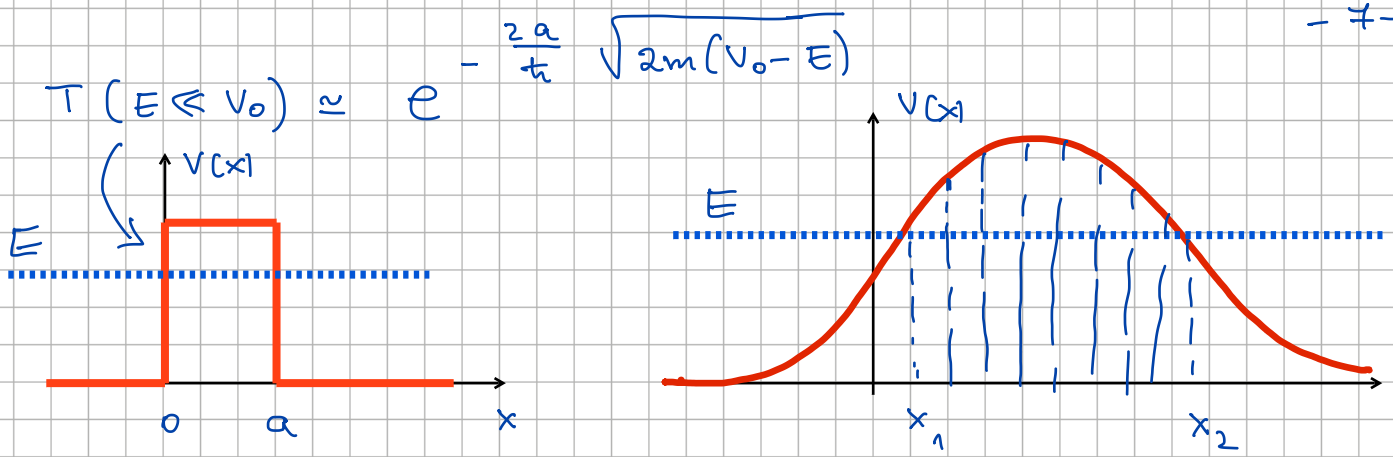


Obs||. Pentru orice valoare $E > 0$ a energiei, coeficientul de tunelare este finit (non-zero)

$$\text{ptr } E \ll V_0 \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \text{sh}^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\text{ptr } k \cdot a = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)} \cdot a \Rightarrow \text{sh}^2 k a \approx e^{2 \cdot k a}$$

$$T(E \ll V_0) \approx \frac{1}{\text{sh}^2 k a} \approx e^{-2ka}$$



La modul general dacă $V(x)$ are o dependență de

partie

$$T(E) \propto e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E)} \cdot dx}$$

↳ coeficientul de tunelare într-un potențial general $V(x)$

Efectul tunel

- constă în trecerea unei particule printr-o regiune "interzisă energetic" în care energia este mai mică decât înălțimea barierei de potențial.
- este un efect pur cuantic și care nu se regăsește în fizica clasică.

Problema O particulă cu masa m

$$V(x) \begin{cases} 0 & \text{în interiorul gropii: } 0 < x < a; \quad 0 < y < b \\ \infty & \text{alfel} \end{cases}$$

