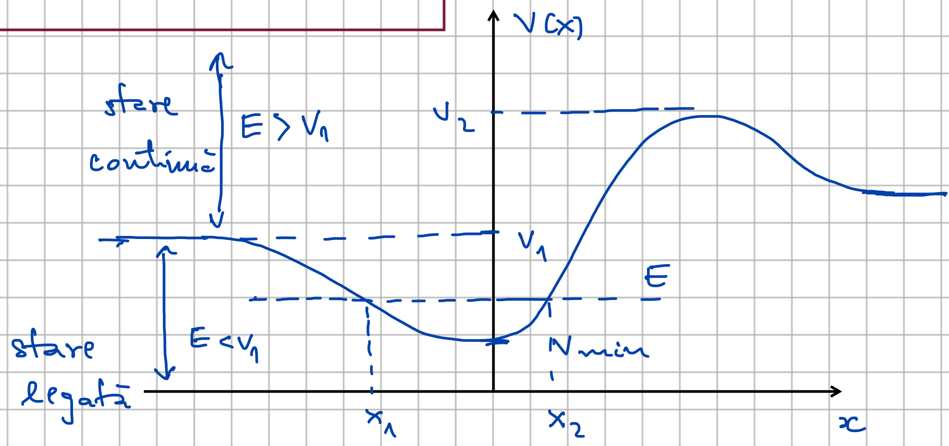
Probleme unidimensionale

- se dorește rezolvarea ec. Schrödinger, independentă de timp ptr o particulă într-o groapă de potențial $V(x)$. Particula se consideră ca având masa m.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\cdot\psi(x) = E\psi(x)}$$

- E - energia particulei



ptr $E < V_1$ - particula se găsește într-o stare legată

ptr $E > V_1$ - stare continuă.

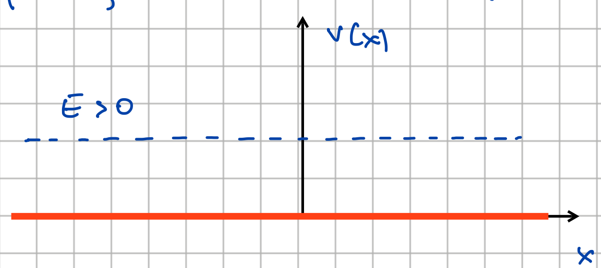
$V_1 < E < V_2$ - particula se poate deplasa la $-\infty$

$E > V_2$ - particula se poate deplasa la $\pm\infty$.

În general într-o stare legată, energia este cuantificată, adică poate lua doar anumite valori, iar într-o stare continuă, energia poate lua orice valoare în general.

Particula liberă

- corespunde la cazul când potențialul $V(x) = 0$ pe axa Ox.



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\psi''(x) = E\cdot\psi(x) \quad \Big|\cdot\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$$

Considerăm doar cazul fizic corespunzător la $E > 0$.

$$\psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\cdot\psi(x) = 0.$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

$$\psi''(x) + k^2 \cdot \psi(x) = 0.$$

Se caută soluții de forma $\psi(x) = e^{\lambda x}$: $\psi'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$\psi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + k^2 e^{\lambda x} = 0 \quad \Big| : e^{\lambda x}$$

$\boxed{\lambda^2 + k^2 = 0}$ – ecuația caracteristică

$$\lambda = \pm i k$$

$$\boxed{\psi_k(x) = A_+ \cdot e^{ikx} + A_- \cdot e^{-ikx}}$$

A_+, A_- sunt două constante.

$$\psi_k(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$$

$\boxed{\psi_+(x) = A_+ e^{ikx}}$ – reprezintă o undă plană care se deplasează spre dreapta (spre $+\infty$)

$\boxed{\psi_-(x) = A_- \cdot e^{-ikx}}$ – reprezintă o undă plană care se deplasează spre stânga (spre $-\infty$).

$$|\psi_+(x)|^2 = \underbrace{A_+ e^{ikx}}_{\psi_+} \cdot \underbrace{A_+^* \cdot e^{-ikx}}_{\psi_+^*} = A_+ \cdot A_+^* = |A_+|^2.$$

$$|\psi_-(x)|^2 = |A_-|^2.$$

$z = a + ib$

$z^* = a - ib$

$|z|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2$

Pt o particulă liberă, funcția de undă nu poate fi normată.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_+^*(x) \cdot \psi_+(x)\, dx = |A_+|^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx}_{} = |A_+|^2 \cdot \infty = \infty$$

Densitatea de curent de probabilitate:

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi} \cdot \left(\psi^*(x)\, \psi'(x) - \psi(x) \cdot \psi^{*\prime}(x) \right)$$

$$j_+(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_+^*(x)\cdot\psi_+'(x) - \psi_+(x)\cdot\psi_+^{*'}(x)\right).$$

$$\psi_+(x) = A_+ e^{ikx} \qquad \psi_+'(x) = ik A_+ e^{ikx}$$

$$\psi_+^*(x) = A_+^* e^{-ikx} \qquad \psi_+^{*'}(x) = -ik A_+^* e^{-ikx}$$

$$j_+(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(A_+^* \cancel{e^{-ikx}}\cdot(ik)\cdot A_+ \cancel{e^{ikx}} - A_+ \cancel{e^{ikx}}\cdot(-ik)\cdot A_+^* \cancel{e^{-ikx}}\right)$$

$$j_+(x,t) = \frac{2\cancel{i}k\hbar}{2m\cancel{i}}\cdot|A_+|^2 = \frac{\hbar\cdot k}{m}\cdot|A_+|^2.$$

$$\boxed{j_+(x,t) = \frac{\hbar\cdot k}{m}\cdot|A_+|^2}$$

$\hbar\cdot k$ - impulsul particulei

$\frac{\hbar\cdot k}{m}$ - viteza particulei

$j_+(x,t)$ - reprezintă curentul generat de o particulă care se mişcă spre $+\infty$.

$\rightsquigarrow +\infty$

$$j_-(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_-^*(x)\cdot\psi_-'(x) - \psi_-(x)\cdot\psi_-^{*'}(x)\right)$$

$$\psi_-(x) = A_-\cdot e^{-ikx} \qquad \psi_-'(x) = (-ik)\,A_- e^{-ikx}$$

$$\psi_-^*(x) = A_-^* e^{ikx} \qquad \psi_-^{*'}(x) = ik\cdot A_-^* e^{ikx}$$

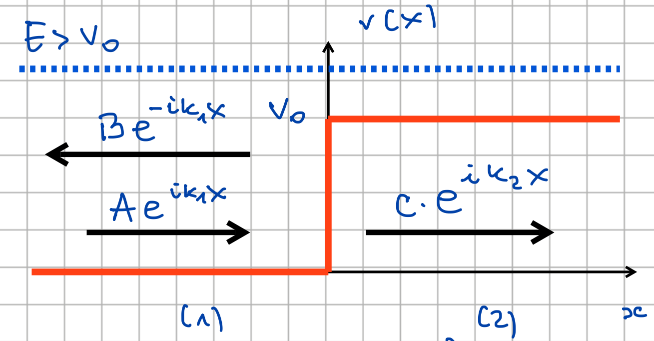
$$\boxed{j_-(x,t) = -\frac{\hbar k}{m}\cdot|A_-|^2}$$

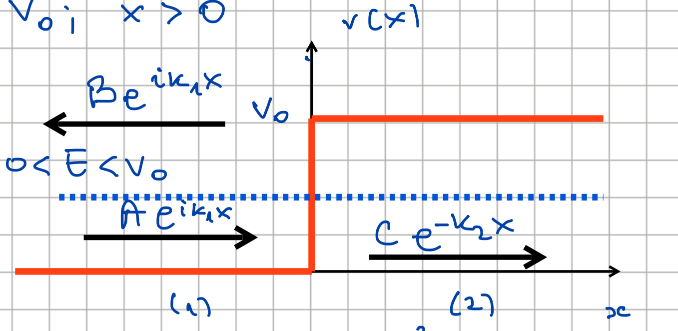
- semnul $(-)$ indică faptul că particula se mişcă spre $-\infty$

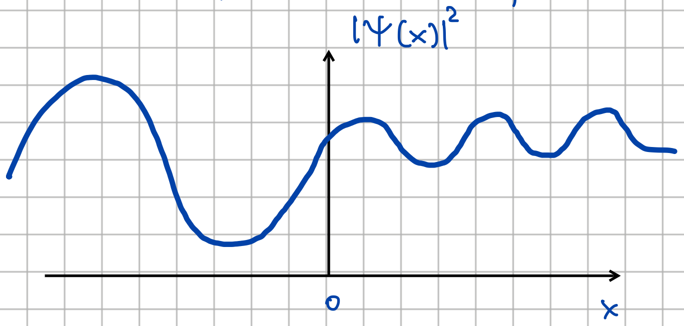
$\overset{\leftsquigarrow}{-\infty}$

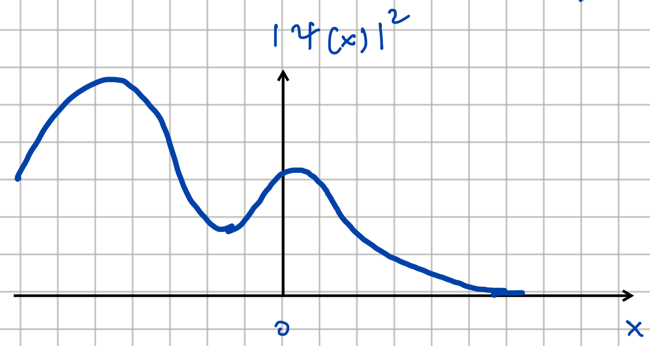
Potențialul treaptă

$$V(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ V_0; & x > 0 \end{cases}$$









a) $E > V_0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\psi''(x) + V(x)\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(x)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x); & x < 0 \\ \psi_2(x); & x > 0 \end{cases}$$

(1): $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_1''(x) = E\psi_1(x) \quad \Big|\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$

$$\psi_1''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x) = 0; \qquad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_1''(x) + k_1^2\psi_1(x) = 0.$$

$$\boxed{\psi_1(x) = A\cdot e^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}}; \qquad x < 0.$$

unda incidentă   unda reflectată

(2): $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_2''(x) + V_0\cdot\psi_2(x) = E\psi_2(x); \quad \Big|\cdot\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$

$$\psi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\cdot\psi_2(x) = 0.$$

$E > V_0$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)$$

$$\psi_2''(x) + k_2^2\,\psi_2(x) = 0.$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

$$\psi_2(x) = C\cdot e^{ik_2x} + D\,e^{-ik_2x} \quad ; \quad x > 0.$$

unda transmisă

unda reflectată în regiunea $x > 0$ nu are semnificație fizică $\Rightarrow D = 0$.

$$\boxed{\psi_2(x) = C\cdot e^{ik_2x}} \qquad x > 0.$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = A\cdot e^{ik_1x} + B\,e^{-ik_1x} & ; \ x < 0 \\ \psi_2(x) = C\,e^{ik_2x} & ; \ x > 0. \end{cases}$$

Pentru găsirea constantelor A, B și C impunem condițiile de continuitate și derivabilitate a fct de undă la frontieră.

$\boxed{\psi(x) \text{ - este o funcție continuă și derivabilă.}}$

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases}$$

$$\psi'(x) = \begin{cases} \psi_1'(x) = ik_1 A\,e^{ik_1x} - ik_1 B\,e^{-ik_1x} & ; \ x < 0 \\ \psi_2'(x) = ik_2\,C\,e^{ik_2x} & ; \ x > 0. \end{cases}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \qquad \qquad \begin{cases} A + B = C \\ ik_1\cdot A - ik_1\cdot B = ik_2\cdot C \end{cases}$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$$

$$\begin{cases} A + B = C \\ k_1(A-B) = k_2\cdot C \end{cases}$$

$$\boxed{B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\cdot A \qquad C = \frac{2k_1}{k_1+k_2}\cdot A}$$

A reprezintă amplitudinea undei incidente.

curentul incident generat de unda incidentă $A e^{ik_1 x}$

$$j_{incident} = \frac{\hbar \cdot k_1}{m} \cdot |A|^2.$$

curentul reflectat generat de unda reflectată $B e^{-ik_1 x}$

$$j_{reflectat} = -\frac{\hbar k_1}{m} \cdot |B|^2.$$

curentul transmis generat de unda transmisă $C \cdot e^{ik_2 x}$

$$j_{trans} = \frac{\hbar \cdot k_2}{m} \cdot |C|^2.$$

Coeficienții de reflexie și transmisie

$$R = \frac{|j_{reflectat}|}{|j_{incident}|} \qquad T = \frac{|j_{transmis}|}{|j_{incident}|}$$

$$R = \frac{\frac{\hbar \cdot k_1}{m} \cdot |B|^2}{\frac{\hbar k_1}{m} \cdot |A|^2} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \;; \quad T = \frac{\frac{\hbar k_2}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k_1}{m} |A|^2} = \frac{k_2 |C|^2}{k_1 |A|^2}.$$

$$\boxed{R = \left|\frac{B}{A}\right|^2} \qquad \boxed{T = \frac{k_2 |C|^2}{k_1 |A|^2}}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$\boxed{R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \qquad T = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}}$$

$$\boxed{T + R = 1}$$ - condiția de conservare a curentului de probabilitate.

b) $\underline{\underline{E < V_0}}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\psi''(x) + V(x)\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(x)$$

$$\psi(x) = \begin{cases}\psi_1(x); & x<0\\ \psi_2(x); & x>0\end{cases}$$

(1): $$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_1''(x) = E\psi_1(x) \quad \Big|\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$$

$$\psi_1''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x) = 0; \qquad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_1''(x) + k_1^2\psi_1(x) = 0.$$

$$\boxed{\psi_1(x) = A\cdot e^{ik_1x} + B\,e^{-ik_1x}; \qquad x<0.}$$

unda incidentă   unda reflectată.

(2): $$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_2''(x) + V_0\cdot\psi_2(x) = E\psi_2(x); \quad \Big|\cdot\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$$

$$\psi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\cdot\psi_2(x) = 0.$$

$$\psi_2''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\psi_2(x) = 0. \qquad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}.$$

$$\psi_2''(x) - k^2\psi_2(x) = 0$$

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm k$$

$$\psi_2(x) = C\,e^{-kx} + D\cdot e^{kx}$$

unda transmisă

$e^{kx} \to \infty$; ptr $x\to\infty \Rightarrow$ termenul nu are semnificație fizică

$$\boxed{\psi_2(x) = C\cdot e^{-kx}; \qquad x>0}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} & ; \quad x<0 \\ \psi_2(x) = C e^{-kx} & ; \quad x>0. \end{cases}$$

Din condiția de continuitate și derivabilitate a fcț de undă:

$$\psi'(x) = \begin{cases} \psi_1'(x) = ik_1 A e^{ik_1 x} - ik_1 B e^{-ik_1 x} & ; \quad x<0 \\ \psi_2'(x) = -kCe^{-kx} & ; \quad x>0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = \psi_2(0) \quad &\Rightarrow \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \quad &\Rightarrow \end{aligned} \quad \begin{cases} A + B = C \\ ik_1(A-B) = -k \cdot C \end{cases}$$

$$B = \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \cdot A \qquad C = \frac{2k_1}{k_1 + ik} \cdot A$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right|^2 = \frac{k_1^2 + k^2}{k_1^2 + k^2} = 1.$$

$\boxed{R = 1.}$ $\Rightarrow$ unde se reflectă în totalitate.

$$j_{tr} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_2^*(x) \cdot \psi_2'(x) - \psi_2(x) \cdot \psi_2^{*\prime}(x) \right)$$

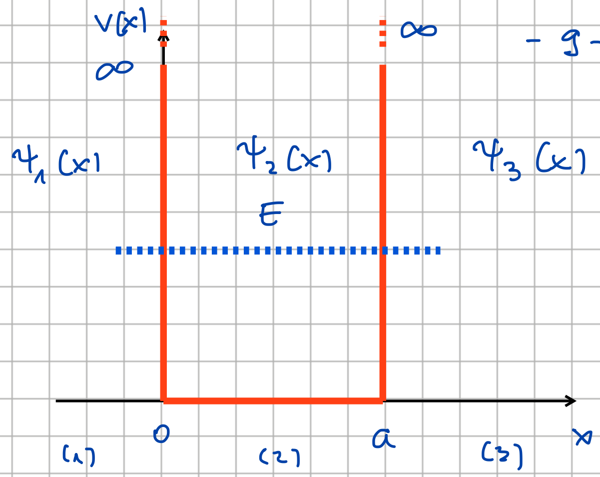
$$\psi_2 = C \cdot e^{-kx} \qquad \psi_2'(x) = -kCe^{-kx}$$

$$\psi_2^* = Ce^{-kx} \qquad \psi_2^{*\prime}(x) = -kC \cdot e^{-kx}$$

$\Rightarrow \boxed{j_{transmis} = 0.}$ $\Rightarrow$ $T = \left| \dfrac{j_{transmis}}{j_{incident}} \right| = 0$!

Groapa infinită de potențial

$$V(x) = \begin{cases} \infty; & x < 0 \\ 0; & 0 \le x \le a \\ \infty & x > a \end{cases}$$



a) Să se determine funcțiile proprii și valorile energiei pentru o particulă care se mișcă în groapa de potențial.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\psi''(x) + V(x)\cdot\psi(x) = E\cdot\psi(x)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x); & x < 0 \\ \psi_2(x) & 0 \le x \le a \\ \psi_3(x); & x > a \end{cases}$$

(1) $V(x) = \infty \Rightarrow \psi_1(x) = 0$

(3) $V(x) = \infty \Rightarrow \psi_3(x) = 0$

(2) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_2''(x) = E\cdot\psi_2(x) \quad \Big| \cdot\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$

$$\psi_2''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2(x) = 0$$

$$\boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_2''(x) + k^2\psi_2(x) = 0$$

$$\psi_2(x) = C_1\cdot e^{ik.x} + C_2\cdot e^{-ikx}$$

Rel Euler:

$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$

$e^{-ikx} = \cos kx - i\sin kx$

$$\psi_2(x) = C_1\cdot(\cos kx + i\sin kx) + C_2(\cos kx - i\sin kx)$$

$$\psi_2(x) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A}\cos kx + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B}\sin kx$$

$$\psi_2(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 \cdot e^{-ikx}$$

$$\psi_2(x) = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx \qquad 0 \le x \le a$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = 0 ; & x < 0 \\ \psi_2(x) = A \cos kx + B \sin kx ; & 0 \le x \le a \\ \psi_3(x) = 0 ; & x > a \end{cases}$$

Impunem condiția de continuitate și derivabilitate a fct de undă:

In cazul de față avem două frontiere la: $x=0$ și $x=a$.

Cond. de continuitate: $\psi(x)$ este continuă pe axa reală.

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_2(0) = 0 \\ \psi_2(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 0 \\ B \cdot \sin ka = 0. \end{matrix}$$

$$B \cdot \sin k \cdot a = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0 \text{ - soluție banală.}$$

$$\Rightarrow \sin k \cdot a = 0 \Rightarrow k \cdot a = n\pi.$$

$$k \cdot a = n \cdot \pi \Rightarrow k = \frac{n \cdot \pi}{a}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

<u>Obs:</u> Condiția de continuitate a fct de undă implică cuantificarea numărului de undă, și implicit a energiei.

$$k_n \in \left\{ \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \ldots \right\}.$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1,2,\ldots}$$

- valorile permise ptr energie.

Energia este cuantificată, iar stările sunt stări legate

$$\psi(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ B \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ 0; & x > a \end{cases}$$

In interiorul gropii $\psi_2(x) = B \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$

Coeficientul B se obține din condiția de normare a funcției de undă.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} |\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\psi_1}}(x)|^2 dx + \int_{0}^{a} |\psi_2(x)|^2 dx + \int_{a}^{a} |\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\psi_3}}(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{0}^{a} |\psi_2(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_{0}^{a} |B|^2 \cdot \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$$

$$|B|^2 \cdot \int_{0}^{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1 \Rightarrow |B|^2 \cdot \frac{a}{2} = 1$$

$$\int_{0}^{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{a} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a}\right) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{a} dx - \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{a} \cos \frac{2n\pi x}{a} dx$$

$$= \underline{\frac{a}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2\pi n}\right) \underbrace{\sin \frac{2\pi n x}{a} \Big|_0^a}_{\to 0.}$$

$$= \frac{a}{2}$$

$$\boxed{B = \sqrt{\frac{2}{a}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_n(x) &= \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\frac{n\pi x}{a}; & 0 \le x \le a \\ 0; & x > a \end{cases} \\ E_n &= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}}$$

Deoarece nr. cuantic n cuantifică energia, el se numește <u>număr cuantic principal</u>.

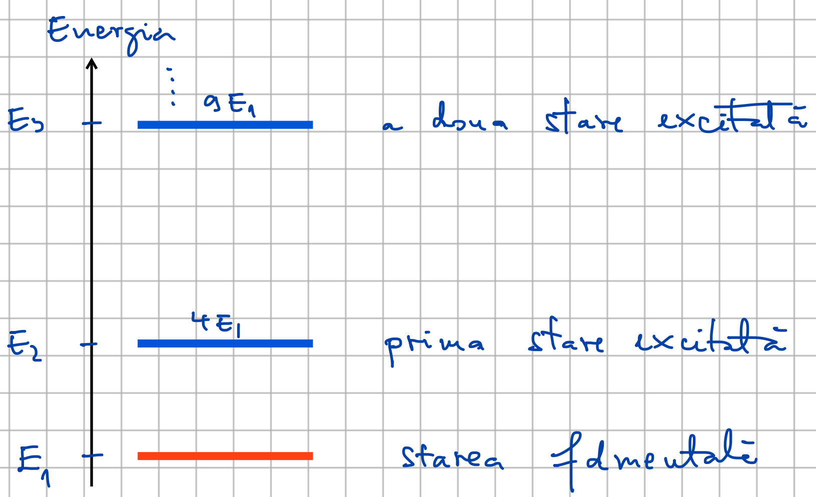
$$E_n = n^2 \cdot E_1$$

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \\ \psi_1(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \cdot \sin\dfrac{\pi x}{a} \end{cases}$$

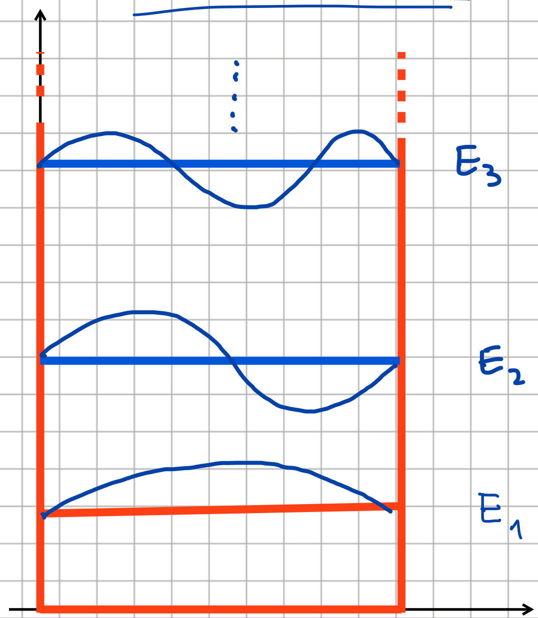
— <u>starea fundamentală</u> și corespunde valorii minime a energiei.

$E_2 = 4E_1$, $E_3 = 9E_1$, ... $E_n = n^2 E_1$ — <u>stări excitate</u>

<u>spectrul energetic</u>



<u>fct de undă</u>



b) Pentru groapa de potențial infinită să se determine valorii medii ale poziției și impulsului $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ și să verifice relațiile de nedeterminare Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

$$\boxed{\langle A \rangle = \bar{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot A \cdot \psi(x)\, dx}$$

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\psi_1^*(x)}_{0} A \cdot \underbrace{\psi_1(x)}_{0} dx + \int_{0}^{a} \psi_2^*(x) \cdot A \cdot \psi_2(x) + \int_{a}^{\infty} \underbrace{\psi_3^*(x)}_{0} \cdot A \cdot \underbrace{\psi_3(x)}_{0} dx$$

$$\langle A \rangle = \int_0^a \psi_2^*(x) \cdot A \cdot \psi_2(x)\, dx$$

$\psi_2(x)$ - reală $\Rightarrow$ $\psi_2^*(x) = \psi_2(x)$

$x \to \hat{x} = x$

$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x$

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^a \psi_2(x) \cdot x \cdot \psi_2(x) \cdot dx \\
\langle p \rangle &= \int_0^a \psi_2(x) \cdot \frac{\hbar}{i} \psi_2'(x)\, dx \\
\langle x^2 \rangle &= \int_0^a \psi_2(x) \cdot x^2 \psi_2(x)\, dx \\
\langle p^2 \rangle &= -\int_0^a \psi_2(x) \cdot \hbar^2 \cdot \psi_2''(x)\, dx.
\end{aligned}}$$

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a} \int_0^a \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a} \int_0^a x \cdot \sin^2 \frac{n\pi x}{a}\, dx = \frac{a}{2}.$$

$$\langle p \rangle = \frac{2}{a} \cdot \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{k\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0.$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a} \cdot \int_0^a x^2 \cdot \sin^2 \frac{k\pi x}{a}\, dx = \frac{a^2}{3} \left(1 - \frac{3}{2\pi^2 n^2}\right)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{2}{a} \cdot \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot (-\hbar^2) \cdot \left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}\right) =$$

$$\psi_2'(x) = \frac{n\pi}{a} \cdot \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$$\psi_2''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{2}{a} \cdot \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2} \underbrace{\int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a}\, dx}_{\frac{a}{2}} =$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2}.$$

$$\Delta x = \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{6\pi^2 n^2} - \frac{a^2}{4} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{6\pi^2 n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = a \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6\pi^2 n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta p = \left(\langle p^2 \rangle - \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\langle p \rangle^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar \cdot n\pi}{a}.$$

Rel. Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \cancel{a} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6\pi^2 n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\hbar \cdot n\pi}{\cancel{a}}. \right)$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \cdot \underbrace{(n\pi) \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6\pi^2 n^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{2} \hbar .$$

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$